

浙江省 2023 年选拔优秀高职高专毕业生进入本科学习统一考试

高等数学【解析版】

请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

选择题部分

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

2. 每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。不能答在试题卷上。

一、选择题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1 + \sin x, & x \geq 0 \\ -\sin x, & x < 0 \end{cases}$ ，则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的 ()

- (A) 连续点 (B) 跳跃间断点
(C) 可去间断点 (D) 无穷间断点

【答案】B

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin x) = 1$ ， $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-\sin x) = 0$ 。

2. 设函数 $f(x) = \tan x - 2x$ ，则 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 等于 ()

- (A) 2 (B) 0
(C) -18 (D) -20

【答案】A

【解析】 $f'(x) = \sec^2 x$ ， $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$

3. 下列四个命题中正确的是 ()

- (A) 若函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续，则函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导。
(B) 若函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续，则函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内有最大值和最小值。
(C) 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内连续，则函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必存在原函数

(D) 若函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上导函数相等, 则 $f(x) = g(x)$

【答案】C

4. 微分方程 $y'' + 2y' + 10y = 0$ 的通解是 ()

(A) $y = e^{3x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

(B) $y = e^{-3x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

(C) $y = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$

(D) $y = e^{-x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$

【答案】D

【解析】该齐次方程组的特征方程为: $\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$ 解得: $\lambda_1, \lambda_2 = -1 \pm 3i$ 则通解

为: $y = e^{-x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

5. 下列四个数项级数中收敛的是 ()

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

(D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$

【答案】B

【解析】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, 且 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 单调递减, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛.

非选择题部分

注意事项:

1. 用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上, 不能答在试题卷上。
2. 在答题纸上作图, 可先使用 2B 铅笔, 确定后必须使用黑色字迹的签字笔或钢笔描黑。

二、填空题: 本大题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分。

6. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & |x| \geq 1 \\ 0, & |x| < 1 \end{cases}$, 则 $f[f(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】0

【解析】 $-1 < f(x) < 1$ ，所以 $f[f(x)] = 0$ 。

7. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+4}{2x+3} \right)^{x+3} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $e^{\frac{1}{2}}$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+4}{2x+3} \right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3+1}{2x+3} \right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x+3} \right)^{x+3} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{2x+3}} = e^{\frac{1}{2}}$ 。

8. 当 $x \rightarrow 0$ 时，若 $1 - \cos ax (a > 0)$ 与 x^2 是等价无穷小，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(ax)^2}{x^2} = \frac{1}{2}a^2 = 1$ ，则 $a = \sqrt{2}$ 。

9. 当函数 $f(x) = \sqrt{4x+1}$ ，则 $f''(2) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $-\frac{4}{27}$

【解析】 $f(x) = (4x+1)^{\frac{1}{2}}$ ， $f'(x) = \frac{1}{2}(4x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 = 2(4x+1)^{-\frac{1}{2}}$ ；

$$f''(x) = -\frac{1}{2}(4x+1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 4 = -2(4x+1)^{-\frac{3}{2}}，f''(2) = -\frac{4}{27}$$

10. 设函数 $y = \sin(1 + \ln x)$ ，则 $dy = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $dy = \cos(1 + \ln x) \cdot \frac{1}{x} dx$

【解析】 $y' = \cos(1 + \ln x) \cdot \frac{1}{x}$ ， $dy = \cos(1 + \ln x) \cdot \frac{1}{x} dx$

11. 若函数 $f(x)$ 满足 $f'(2) = 1$ ，则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[f\left(2 + \frac{h}{2}\right) - f\left(2 - \frac{h}{2}\right) \right] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 1



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[f\left(2 + \frac{h}{2}\right) - f\left(2 - \frac{h}{2}\right) \right] = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(2 + \frac{h}{2}\right) - f(2)}{\frac{h}{2}} + \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(2 - \frac{h}{2}\right) - f(2)}{-\frac{h}{2}}$$

$$= f'(2) = 1$$

12. 曲线 $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = 1 + t + \arctan t \end{cases}$ 在 $t=0$ 相应的点处的切线方程是_____.

【答案】 $y = 2x + 1$

【解析】 $k = \frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{1}{1+t^2}}{e^t \sin t + e^t \cos t} \Big|_{t=0} = 2$, $t=0$ 时, $x=0, y=1$, 切线方程为

$y-1=2x$, 即 $y=2x+1$

13. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $\int_0^9 f(x) dx = 10$, 则 $\int_0^9 xf(x^2) dx =$ _____.

【答案】 5

【解析】 $\int_0^9 xf(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^9 f(x^2) dx^2 = \frac{1}{2} \int_0^9 f(t) dt = 5$.

14. 极限 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x-3} \int_3^x \frac{\sin t}{t} dt =$ _____.

【答案】 $\sin 3$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x-3} \int_3^x \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{x \rightarrow 3} 3 \frac{\sin x}{x} = \sin 3$.

15. 广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{(x+1)^3}} dx$ _____.

【答案】 4

【解析】 $\int_0^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{(x+1)^3}} dx = 2 \int_0^{+\infty} (x+1)^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{-4}{\sqrt{x+1}} \Big|_0^{+\infty} = 0 - (-4) = 4.$

三、计算题：本题共有 8 小题，其中 16-19 小题每小题 7 分，20-23 小题每小题 8 分，共 60 分。计算题必须写出必要的计算过程，只写答案的不给分。

16. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + 2e^{-x} - 3}{x \ln(1+x)}.$

【解】原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + 2e^{-x} - 3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} - 2e^{-x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e^{2x} + 2e^{-x}}{2} = 3.$

17. 求由方程 $\sin(x+y) + e^{xy} - 3 = 0$ 所确定的隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}.$

【解】等式两边同时对 x 求导得 $\cos(x+y) \cdot (1+y') + e^{xy} (y + xy') = 0$

得 $y' = -\frac{\cos(x+y) + ye^{xy}}{\cos(x+y) + xe^{xy}}.$

18. 求积分 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\sin x - \sin^3 x} dx$

【解】 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\sin x - \sin^3 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x \sqrt{\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\sin x} d \sin x = \frac{2}{3} \sqrt{\sin^3 x} \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$

19. 求由曲线 $y = \sin x$ 和直线 $y = 2x$ 及 $x = \pi$ 所围成图形的面积.

【解】联立 $\begin{cases} y = \sin x \\ y = 2x \end{cases}$ 得交点 $(0, 0)$, $S = \int_0^{\pi} 2x - \sin x dx = (x^2 + \cos x) \Big|_0^{\pi} = \pi^2 - 2.$

20. 求不定积分 $\int \frac{1 + \ln^2 x}{x^2} dx.$

【解】原式 $= \int \frac{1}{x^2} dx - \int \ln^2 x d \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \ln^2 x + \int \frac{1}{x} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx$

$$= -\frac{1}{x} - \frac{\ln^2 x}{x} - 2 \int \ln x d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} - \frac{\ln^2 x}{x} - \frac{2}{x} \ln x + 2 \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{3}{x} - \frac{\ln^2 x}{x} - \frac{2 \ln x}{x} + C.$$

21. 求过点 $P(1, -1, -1)$ 且与直线 $\begin{cases} x-2y+4z-7=0 \\ 3x-5y+3z+2=0 \end{cases}$ 平行的直线方程, 并求点 P 到平面 $3x-2y+2z+3=0$ 的距离.

【解】已知直线的方向向量 $s = (1, -2, 4) \times (3, -5, 3) = (14, 9, 1)$.

故所求直线的方程为 $\frac{x-1}{14} = \frac{y+1}{9} = \frac{z+1}{1}$.

点 P 到平面 $3x-2y+2z=0$ 的距离 $d = \frac{|3+2-2+3|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+2^2}} = \frac{6}{\sqrt{17}}.$

22. 求微分方程 $y' + \frac{2}{1+x}y = e^x$ 的通解.

【解】一阶线性微分方程

$$y = e^{-\int \frac{2}{1+x} dx} \left(\int e^{\int \frac{2}{1+x} dx} \cdot e^x dx + C \right) = \frac{1}{(x+1)^2} \left(\int (x+1)^2 e^x dx + C \right)$$

$$= e^x - \frac{2xe^x}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

23. 设函数 $y = \frac{2x^2}{3x+1}$, 试确定函数的单调区间, 并求曲线 $y = \frac{2x^2}{3x+1}$ 的渐近线.

【解】 $y = \frac{2x^2}{3x+1} \left(x \neq -\frac{1}{3} \right), \quad y' = \frac{4x(3x+1) - 6x^2}{(3x+1)^2} = \frac{2x(3x+2)}{(3x+1)^2}.$

令 $y' = 0$, 则 $x = 0, -\frac{2}{3}$

x	$\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$	$\left(-\frac{2}{3}\right)$	$\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$	$\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$	0	$(0, +\infty)$
y'	+	0	-	-	0	+
y	$\nearrow$		$\searrow$	$\searrow$		$\nearrow$



故单调增区间是 $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$, $(0, +\infty)$; 单调减区间是 $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{3x+1} = \infty$, 故无水平渐近线;

$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{2x^2}{3x+1} = \infty$, 故 $x = -\frac{1}{3}$ 为垂直渐近线;

令斜渐近线为 $y = kx + b$,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{(3x+1)x} = \frac{2}{3}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{3x+1} - \frac{2}{3}x \right) = -\frac{2}{9},$$

故斜渐近线为 $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}$.

四、综合题： 本大题共3小题，每小题10分，共30分。

24. 设曲线 $y = \sqrt{x-1}$ 与直线 $y = a$ ($0 < a < 2$) 及 $x = 0$, $y = 0$ 所围成的平面图形为 S_1 ,

由曲线 $y = \sqrt{x-1}$ 与直线 $y = a$ 及 $x = 5$ 所围成的平面图形为 S_2 .

(1) 求 S_1, S_2 分别绕 x 旋转一周而成的旋转体体积 V_1, V_2 (用 a 表示).

(2) 当 a 为何值时, $V_1 + V_2$ 取得最小值, 并求此最小值.

【解】 (1) $y = \sqrt{x-1} \Rightarrow x = y^2 + 1$;

$$V_1 = 2\pi \int_0^a y(y^2+1)dy = 2\pi \int_0^a (y^3+y)dy = 2\pi \left[\frac{y^4}{4} + \frac{y^2}{2} \right]_0^a = \frac{\pi(a^4+2a^2)}{2};$$

$$V_2 = \pi \int_{a^2+1}^5 (x-1)dx - \pi \int_{a^2+1}^5 a^2 dx = \pi \left(\frac{1}{2}x^2 - x - a^2x \right) \Big|_{a^2+1}^5 = \pi \left(\frac{1}{2}a^4 - 4a^2 + 8 \right)$$

$$(2) \quad V_1 + V_2 = \pi \left(\frac{a^4}{2} + a^2 - 4a^2 + \frac{a^4}{2} + 8 \right)$$

$$\text{设 } V(a) = \pi(a^4 - 3a^2 + 8); \quad V'(a) = 2\pi a(2a^2 - 3)$$

$$\text{令 } V'(a) = 0 \text{ 得 } a = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad V(a) = \frac{23\pi}{4}$$

25. (1) 将函数 $\ln(1+x)$ 展开为 x 的幂级数.

(2) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} x^n$ 的收敛区间

(3) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ 的值

【解】(1) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (-1 < x \leq 1).$

(2) $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(n+2)}}{\frac{(-1)^n}{n(n+1)}} \right| = 1$, 收敛半径 $R=1$, 故收敛区间为 $(-1, 1)$.

(3) 令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} x^{n+1}$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n = -\ln(1+x)$

$S(x) - S(0) = \int_0^x -\ln(1+x) dx = -(1+x)\ln(1+x) + x$,

$S(0) = 0$, 故 $S(x) = -(1+x)\ln(1+x) + x$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 4S\left(\frac{1}{4}\right) = -5\ln\frac{5}{4} + 1.$

26. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 2)$ 内具有 n 阶导数, 且 $f(1) = 0$, $f''(x) > 0$.

(1) 在区间 $(0, 2)$ 内写出 $f(x)$ 在 x_0 处带拉格朗日余项的一阶泰勒公式, 并证明:

$f(x) \leq f'(x)(x-1).$

(2) 证明: 当 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时, 有 $(1-x)f\left(x+\frac{1}{2}\right) \leq \left(\frac{1}{2}-x\right)f(x).$

【解】

(1) $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$, ξ 介于 x 与 x_0 之间;

因为 $f''(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 内单调递增

当 $x \in (0, 1)$ 时, 存在 $c_1 \in (x, 1)$ 使得 $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(c_1) > f'(x).$

故 $f(x) - f(1) < f'(x)(x-1)$;

当 $x \in (1, 2)$ 时, 存在 $c_2 \in (1, x)$ 使得 $\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(c_2) < f'(x)$,

故 $f(x) - f(1) < f'(x)(x-1)$, 即 $f(x) < f'(x)(x-1)$;

当 $x=1$ 时 $f(x) = 0 = f'(x)(x-1)$;

(2) 由 (1) 可得对于 $\forall x \in (0, 2)$ 有 $f(x) \leq f'(x)(x-1)$;

当 $x \in (0, \frac{1}{2})$ 时, 有 $f(x + \frac{1}{2}) \leq f'(x + \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$;

则 $\frac{f(x + \frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} \geq f'(x + \frac{1}{2})$, 又因为 $f''(x) \geq 0$, 故 $f'(x + \frac{1}{2}) \geq f'(x)$

故 $(1-x)f(x + \frac{1}{2}) \leq (\frac{1}{2} - x)f(x)$.