浙江省 2022 年选拔优秀高职高专毕业生进入本科学习统一考试

高等数学

一、选择题（每个小题给出的选项中，只有一项符合要求：本题共有 5 个小题，每小题 4 分，共 20 分）

1.$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan x}{x},x>0\\ e^{x},x\le 0\end{cases}$,$x=0$是它的　（ A ）

$A.$连续点　　　$B.$可去间断点　　　$C.$跳跃间断点　　　$D.$无穷间断点

2.$x\to 0,\ln\left(1+ax^{2}\right)$与$1-\cos x$是等价无穷小，则$a=$（ C ）

$A.-1$　　　$B.-\dfrac{1}{2}$　　　$C.\dfrac{1}{2}$　　　$D.1$

3.下列选项错误的是(B)

$A.f(x)$在$[a,b]$上连续，$f(a)f(b)<0$,则至少存在一点ξ，使得$f(\xi)=0$

$B.f(x)$连续，则$f(x)$必可导

$C.f(x)$在$[a,b]$上连续,则在$[a,b]$上存在最大值与最小值

$D.f(x)$在$[a,b]$上连续,(a,b)可导，$f(x)$在$x=x_0$处取得极值$(x_0\in(a,b))$,则$f'(x_0)=0$

4.比较$I_1=\int_0^1\dfrac{e^{x}}{1+\sin x}dx,I_2=\int_0^1\left(\dfrac{e^{2x}}{1+\sin x}\right)^2dx,I_3=\int_0^1\left(\dfrac{e^{3x}}{1+\sin x}\right)^3dx$的大小($A$)

$A.I_1<I_2<I_3$

$B.I_3<I_1<I_2$

$C.I_2<I_1<I_3$

$D.I_3<I_2<I_1$

5.下列级数发散的是（ D ）

$A.\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$　　　$B.\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$　　　$C.\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{n!}$　　　$D.\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

非选择题部分

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

6.$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x+3}\right)^x=$_____ e^2 ________

7. $f(x)$在$x=0$处可导，且$f'(0)=2$求$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{\sqrt{1+x}-1}=$ ________ 4 ________

8. $\begin{cases} x=1+t^2 \\ y=\cos t \end{cases}, \dfrac{dy}{dx}=$ _____ $\dfrac{-\sin t}{2t}$ _____

9. $f(x)=\begin{cases} \int_0^x t^2-2t-3dt, x>0 \\ x^2, x\le 0 \end{cases}$,在$x=$ __3__ 处取极小值

10. $\int_0^1 x(1-x)^2 dx=$ ______ $\dfrac{1}{12}$ ________

11. $\ln y\text{-}xy^2=1$求$dy=$ ______ $\dfrac{y^3}{1-2xy^2}dx$ ________

12. $\int_0^1 \dfrac{1+\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=$ _____ $2+2\sin 1$ ______

13. 曲线$y=\dfrac{x^2+x+1}{x-3}$求垂直渐近线 ______ $x=3$ ___________

14. $\sin x$是$f(x)$的一个原函数，求$\int xf(x)dx=$ _____ $x\sin x+\cos x+C$ ______

15. $y=x^3+e^x$在$(0,1)$处的切线方程为 _____ $y=x+1$ ________

三、计算题（本题共有 8 小题，其中 16-19 小题每小题 7 分，20-23 小题每小题 8 分，共 60 分。计算题必须写出必要的计算过程， 只写答案的不给分）

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x\cdot\sin x}=\dfrac{1}{2}$

17. $f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)$,求$f'(0),f^{(4)}(0)$

$f'(0)=6$

$f^{(4)}(0)=24$

18. $\int \frac{1}{\sqrt{x-5}+1} dx =$

令$\sqrt{x-5}=t$

$\int \frac{1}{t+1} d\left(t^2+5\right) = \int \frac{2t}{t+1} dt = 2t - 2\ln(t+1) + C$

换回：原式 $= 2\sqrt{x-5} - 2\ln\left(\sqrt{x-5}+1\right) + C$

19. $f(x)=\begin{cases} x^2, x>0 \\ -x^2, x\le 0 \end{cases}$, 讨论$f(x)$在$x=0$是否连续，是否可导

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to0^+} f(x), \therefore f(x)$在$x=0$处连续

$f'_-(0) = \lim\limits_{x\to0^-} \frac{-x^2-0}{x-0} = 0$

$f'+(0) = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{x^2-0}{x-0} = 0$

$\therefore f(x)$在$x=0$可导

20. $\int_{-2}^{2} \left[\frac{\sin^7 x}{1+x^6} + x^2 e^{|x|}\right] dx =$

$= 2\int_0^2 x^2 e^x dx = 2x^2 e^x\Big|_0^2 - 4\int_0^2 x e^x dx = 8e^2 - 4(xe^x - e^x)\Big|_0^2$

$= 4e^2 - 4$

21.求过点A$(2,1,2)$,与直线$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-2y-z+1=0 \end{cases}$垂直的平面方程

$$\vec{n}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=(1,2,-3),\text{平面}(x-2)+2(y-1)-3(z-2)=0 \Rightarrow x+2y-3z+2=0$$

22.求$y''-5y'+6y=e^x(x+1)$的通解

特征方程$r^2-5r+6=0, r_1=2, r_2=3. y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$

$f(x)=e^x(x+1), \lambda=1$不是特征方程的根，$y^*=(ax+b)e^x$

$(y^*)'=(ax+a+b)e^x, (y^*)''=(ax+2a+b)e^x,$

$$\begin{cases} a-5a+6a=1 \\ 2a+b-5(a+b)+6b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{5}{4} \end{cases}, y^*=(\frac{1}{2}x+\frac{5}{4})e^x$$

$$y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}+(\frac{1}{2}x+\frac{5}{4})e^x$$

23.$y=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{x}$的单调区间和凹凸区间

$f'(x)=x^2-\dfrac{1}{x^2}, f'(x)=0, x=\pm 1$

$f'(x)<0,(-1,0),(0,1)$单调递减

$f'(x)>0(-\infty,-1),(1,+\infty)$单调递增

$f''(x)=2x+\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{2x^4+2}{x^3}$

$f''(x)<0,(-\infty,0)$凸区间

$f''(x)>0,(0,+\infty)$凹区间

四、综合题：（本题共 30 分，每题 10 分）

24. $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}\left(|x|<1\right)$

(1)求 $\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}$ 收敛半径和和函数

(2)求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n}}$ 求和

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x}{1-x},\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+2}}{x^{n+1}}\right|=|x|<1$, 收敛半径为1.

(2) $\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n}$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{2^{n}}=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^{2}}=4$

25. $y=\sqrt{x}$, 在 $x=t(t>0)$, 绕 x 轴面积 D，设为 S，绕 x 轴体积 V_1，y 轴体积 V_2

(1) $t=4$, 求 S

(2)当 $V_1=V_2$ 时，求 t

25.(1) $S=\int_{0}^{4}\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{4}=\frac{16}{3}$

(2) $V_1=\pi\int_{0}^{t}xdx=\frac{\pi}{2}t^{2},V_2=2\pi\int_{0}^{t}x^{\frac{3}{2}}dx=2\pi*\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}$

$\frac{\pi}{2}t^{2}=\frac{4\pi}{5}t^{\frac{5}{2}},\sqrt{t}=\frac{5}{8},t=\frac{25}{64}$

26.$g(x)$是闭区间$[-1,1]$上连续的奇函数，在（$-1,1$）上可导

设$f(x)=\int_{-1}^{x} g(t)dt$

(1)证明$f'(0)=0$

(2)证明$f'(\xi)+\xi f(\xi)=0$

(3)$\eta \in (0,1), f''(\eta)=g(1)$

(1)$f'(x)=g(x), g(x)$是奇函数，则$f'(0)=g(0)=0$;

(2)构造函数$F(x)=xf(x)$, 在$[-1,1]$上连续，在$(-1,1)$上可导

$$f(1)=\int_{-1}^{1} g(x)dx=0, f(-1)=\int_{-1}^{-1} g(x)dx=0$$

$F(-1)=0, F(1)=0$,

根据罗尔定理，$\exists \xi \in$（$-1,1$），$F'(\xi)=0 \Rightarrow \xi f'(\xi)+f(\xi)=0$

(3)$f'(x)=g(x)$是$[-1,1]$上连续的奇函数，

根据拉格朗日中值定理可知，$\exists \eta \in$（$0,1$），$f''(\eta)=\dfrac{f'(1)-f'(0)}{1-0}=g(1)$.